discurso (25), 1995: 185-203

É Possível Apresentar uma Definição de Referencial Físico com base na Noção de Invariância?*

Claude Comte**

Resumo: Este artigo analisa a questão do referencial físico, especialmente no que concerne às condições de aplicação das leis físicas em situações onde é possível a reprodução dos fenômenos. Mostra-se, em vários casos, que as considerações de simetria e as transformações de invariância desempenham um papel fundamental na ciência física e impõem severas restrições à forma de suas leis e princípios.

Palavras-chave: referencial físico – invariância – relatividade – filosofia da física

I

A questão do referencial é de importância central em qualquer teoria física. Realmente, ela está intimamente ligada com a questão das condições de aplicabilidade das leis e princípios físicos. Parece que esse problema não

* O tema deste texto foi apresentado em aula de pós-graduação em outubro de 1994 junto ao Departamento de Filosofia da Universidade de São Paulo. A visita do prof. Claude Comte se deu no âmbito do Acordo Capes-Cofecub 141/93. A tradução do texto foi feita por Júlio Celso Ribeiro e Pablo Rubén Mariconda.

** REHSEIS, Universidade de Paris VII.

tem recebido a atenção que merece: com efeito, nada há sobre ele, que não silêncio, na quase totalidade dos tratados de Mecânica Quântica.

É fato que a formulação das leis físicas só faz sentido na medida em que estas se apliquem ao máximo possível de situações de laboratório ou, o que dá no mesmo, ao maior conjunto de pontos-de-vista-de-observação equivalentes com respeito a fenômenos físicos. As correspondentes transformações de espaço-tempo que conectam diferentes situações equivalentes ou diferentes pontos-de-vista-de-observação, um em relação ao outro, são as transformações de invariância da teoria física ou, em outras palavras, as simetrias fundamentais do espaço-tempo.

A noção de invariância é inerente às teorias físicas: todos os físicos assumem que o mundo físico é inteligível. Isto exige que as teorias físicas sejam verdadeiras em qualquer momento e em qualquer lugar do Universo. Como somente fenômenos reprodutíveis são acessíveis à pesquisa científica, a primeira tarefa de qualquer espécie de teoria física é selecionar o conjunto completo de situações em que os fenômenos físicos podem ser reproduzidos. Somente então é possível descrever fenômenos reprodutíveis por leis invariantes.

Giordano Bruno e Galileu foram os primeiros a ressaltar que as leis da Mecânica (as leis da queda livre) são as mesmas em terra firme ou em um navio em movimento uniforme. A intuição de Bruno e os experimentos, reais ou imaginários, de Galileu são a origem da noção muito útil de um sistema físico isolado. Além do mais, Galileu apontou a impossibilidade de detectar o movimento de um tal sistema (o navio, por exemplo) através de experimentos internos. Esta última proposição é equivalente ao postulado de que os fenômenos são reprodutíveis em qualquer sistema físico isolado: deste modo, ela deve ser considerada como historicamente fundante do princípio de relatividade.

O que se entende por "reprodutibilidade"? "Causas semelhantes sempre produzem efeitos semelhantes." Este enunciado bem conhecido resume o determinismo laplaciano estrito. Mas processos quânticos se afastam desta doutrina e mesmo na Física Clássica são exceção os processos que obedecem ao determinismo laplaciano, sendo regra a sensibilidade a pequenas variações das condições iniciais. Na Mecânica Celeste, por exemplo, a sensibilidade aparece tão logo o número de corpos interagentes supera dois. Além do mais, a existência de sistemas físicos cuja evolução não pode ser predita pelo cálculo, mesmo numérico, não está de modo algum excluída, seja na Física Clássica, seja na Física Quântica. Introduzamos o termo "multideterminismo" para caracterizar o seguinte tipo de comportamento: uma vez que o estado inicial está determinado com a maior precisão possível, o estado final não pode mais ser predito. Este estado pode ser um dentre um conjunto bastante amplo de estados finais possíveis, os quais por repetição do experimento se mostra que ocorrem com diferentes probabilidades. Inversamente, o estado inicial não pode ser "retrodito" a partir do conhecimento do estado final: ele é, de modo similar, um dentre um conjunto de estados iniciais possíveis.

A seguinte hipótese física está justificada para uma ampla classe de sistemas físicos: se um sistema isolado evolui de um estado inicial i para um dos possíveis estados finais de um conjunto F, então qualquer estado f que pertença a F pode ser alcançado a partir do conjunto I de estados iniciais possíveis e qualquer estado i' pertencente a I leva a um dos estados de F e a nenhum outro. Em outras palavras, predição e "retrodição" operam entre conjuntos de estados I e F. O determinismo laplaciano corresponde ao caso especial em que os conjuntos I e F são conjuntos unitários. Além disso, supomos a existência de probabilidades de transição w(i,f) de um estado i pertencente a I para um estado f pertencente a F.

A partir da correspondência um-a-um entre conjuntos de estados iniciais e finais, é possível provar diretamente a existência de leis de conservação, sem recorrer ao formalismo hamiltoniano ou a quaisquer postulados adicionais. Nosso conhecimento das evoluções multideterminísticas é limitado, por um lado, pelas leis de conservação que restringem a gama de estados acessíveis (espectro), e, por outro lado, pelas probabilidades desses estados. O que significa reprodutibilidade num processo multideterminístico? Através da repetição por um certo número de vezes do mesmo experimento, partindo sempre das mesmas condições iniciais fixadas sempre com a mesma precisão, verificaremos em nosso laboratório, assumido como na situação ótima de um sistema isolado, que nós reproduzimos o mesmo espectro de estados sempre com as mesmas probabilidades.

A ausência de reprodutibilidade no sentido precedente será encarada pelos físicos como indicativa de alguma causa ainda não identificada cuja influência é diferente em cada realização do experimento. Os físicos sempre foram bem-sucedidos em restaurar a reprodutibilidade por meio do aumento das fronteiras do sistema a fim de englobar as causas suplementares, após colocá-las sob controle experimental.

As únicas causas admissíveis são os fatos observáveis no sentido de Mach para esta expressão (Mach 19). Uma teoria física sólida prescinde de hipóteses *ad hoc*, apoiadas em causas fictícias sem nenhuma outra indicação de sua existência que não o fato único para cuja explicação foram introduzidas; o fenômeno a ser explicado deve ser relacionado com outros fatos observáveis.

Diante da tarefa de definir o sistema de referência no qual deviam valer o princípio de inércia de Galileu e outras leis da Mecânica, Newton (Newton 20) veio a postular a existência de um espaço e de um tempo absolutos. "O Tempo Absoluto flui igualmente independentemente de qualquer coisa externa" e "o Espaço Absoluto, por sua própria natureza, independentemente de qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel." O famoso experimento newtoniano do balde, em que forças centrífugas conduziam o liquido às paredes, pretendia provar que a causa das forças centrífugas é o Espaço Absoluto e nada mais, e que essas forças não devem ser encaradas como resultantes do movimento relativo a outras massas, tais como as estrelas fixas, mas como resultantes da rotação absoluta no espaço vazio.

As bases lógicas dos conceitos newtonianos foram minuciosamente analisadas pela primeira vez por Mach, em seu estudo crítico da Mecânica, que teve uma profunda influência sobre Einstein. Ele rejeitou o espaço vazio como uma causa, uma vez que ele não é um fato observável. Já que não temos nenhuma outra indicação de sua existência a não ser as forças centrífugas, estamos apoiando a hipótese do espaço absoluto somente no fato para cuja explicação foi introduzido. Ele expressou pela primeira vez a idéia de que a totalidade das massas no universo deve ser encarada como a causa real das forças centrífugas e das forças inerciais em geral. Ele enfatizou que "a única lição a ser tirada do experimento do balde de Newton é que o movimento relativo da água com respeito às paredes não causa forças centrífugas perceptíveis, sendo o movimento relativo às massas da Terra e a outros corpos celestes a causa dessas forças". O que aconteceria se as paredes do balde crescessem até abarcar a totalidade da massa do universo? Não haveria mais forças centrífugas no balde. Pois não haveria mais causa factual para elas.

Contrariamente à visão de Newton, só movimentos relativos podem gerar forças centrífugas, o que nos conduz a exigir que somente movimentos relativos de corpos estejam envolvidos nas leis físicas. Trilhando esse caminho, Einstein (Einstein 13) chegou ao enunciado de que, dentre todos os sistemas de referência imagináveis, "em qualquer tipo de movimento relativo de um ao outro, não há nenhum que possamos ver como privilegiado *a priori*"; e chegou também a uma extensão considerável do princípio de relatividade: "As leis da Física devem ser de tal natureza que se apliquem a sistemas de referência com qualquer tipo de movimento". A tradução matemática consiste na exigência de que "as leis gerais da Natureza devam ser expressas por equações que se mantenham válidas para todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes com respeito a quaisquer substituições (covariância geral).

De fato, as leis da Física, com exceção das leis da gravitação, são deduzidas num sistema arbitrário de coordenadas, a partir de suas bem-comportadas expressões relativísticas-especiais, que permanecem verdadeiras em referenciais galileanos locais. A concepção de Einstein levanta duas questões: 1) é a covariância linear uma condição necessária?; 2) os referenciais locais inerciais não têm nenhum papel privilegiado, ao menos na tarefa de estabelecer a forma das leis físicas?

A primeira questão permanece aberta. No que concerne à segunda, Kretschmann (Kretschmann 17) apontou que ao princípio de covariância geral falta sentido físico, porque qualquer teoria pode ser expressa na forma covariante (como é o caso das equações de Maxwell em coordenadas arbitrárias) e, portanto, este princípio tem no máximo um valor heurístico (Einstein 14).

A fim de superar esta última dificuldade, é possível propor uma definição moderna do que constitui um sistema de referência que não se afaste do espírito da perspectiva de Giordano Bruno e Galileu sobre a questão. Sistemas isolados são inegavelmente privilegiados, na medida em que são de fato os únicos em que os fenômenos físicos são reprodutíveis e, portanto, são os únicos em que as leis físicas podem ser estabelecidas. Qualquer teoria física sólida deve iniciar dando conta deles. Reconhecer este ponto não contradiz a Relatividade Geral: pode, outrossim, servir para fortalecer suas fundações.

Uma nave espacial que se mova livremente proporciona uma construção moderna de um sistema de referência que substitua o navio de Galileu e Bruno. Como ela não é guiada por nenhuma força externa de natureza eletromagnética ou nuclear, nossa nave espacial isolada é dita estar em movimento inercial. A gravidade não é interpretada como uma força externa, mas como um desvio de seu movimento inercial do movimento retilíneo uniforme, devido à distribuição das massas celestes circunvizinhas. Isto é possível devido à notável propriedade do campo gravitacional de imprimir a mesma aceleração a todos os corpos. Nesta medida, nossa nave espacial corresponde ao que significa "referencial galileano local" na Relatividade Geral. Como se sabe, referenciais galileanos só podem ser construídos em pequenas regiões e sua construção requer que se pare a rotação da nave com respeito às massas celestes. Uma vez que esta última condição esteja satisfeita, qualquer pequena região em repouso no interior de nossa nave pode por si ser considerada um sistema isolado, porque a matéria colocada naquela região não estará sujeita a qualquer força centrífuga.

Um referencial galileano local é comumente definido como um sistema no qual o princípio de inércia de Galileu é válido. Embora na prática nada mude, a definição aqui proposta para um referencial inercial local, referindo-se a sistemas isolados e à reprodutibilidade no lugar do princípio de Galileu, constitui um avanço teórico:

(1) De fato, enfatizamos a noção de invariância das leis físicas (ou simetrias do espaço-tempo) como uma conseqüência da reprodutibilidade dos fenômenos físicos. O princípio de inércia de Galileu é derivado das simetrias do espaço-tempo, como foi mostrado por Levy-Leblond (Levy-Leblond 18). Entre as paredes de nossa nave espacial temos à disposição um laboratório ideal: nada mudará no processo ou nos resultados de um experimento se transladarmos ou girarmos nesse limitado espaço interior nosso aparato ex-

perimental, se o colocarmos em estado de movimento inercial ou se repetirmos o experimento em outro momento. Não há experimento que contradiga a idéia de que nosso sistema é isolado. A localização espacial e o estado de movimento inercial de nossa nave com respeito às massas do universo não podem ser detectados por qualquer experimento interno, como era o caso do navio de Galileu e Bruno.

(2) Ao ampliar o papel central das transformações de invariância (ou, o que dá no mesmo, das transformações inerciais), isto é, homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, princípio de relatividade, uma drástica redução do conjunto de princípios fundamentais pode ser obtida. A invariância é uma condição severamente restritiva, já que concede pouca liberdade à forma das leis físicas gerais.

Isto será ilustrado no caso da Mecânica Clássica ("clássica" no sentido de não-quântica). Um esquema dedutivo universal que generaliza a metodologia desenvolvida em meu trabalho anterior (Comte 5, pp. 225-235) permite estabelecer, com muita simplicidade e de um modo completamente análogo, as leis da Estática (teoria do equilíbrio), da Dinâmica e da Cinemática (estas duas últimas serão estudadas com maiores detalhes em artigos posteriores). Como resultado, a forma geral das leis correspondentes é completamente determinada a menos do valor de algumas constantes universais que vêm a ser a curvatura R do espaço no caso da Estática e o limite superior c da velocidade de propagação da energia no caso da Dinâmica e da Cinemática. As constantes R e c devem ser determinadas através de experimentos. As expressões gerais das leis correspondem à Dinâmica Einsteniana em espaços não-euclidianos, incluindo aquelas da Mecânica Newtoniana como o caso limite em que R e c tendem ao infinito.

Da perspectiva da Filosofia da Ciência, essas considerações tendem a dar crédito à seguinte tese: o simples fato de que algum discurso racional sobre os fenômenos naturais seja possível limita fortemente a própria forma desse discurso.

Para a tarefa de descobrir leis físicas gerais, como por exemplo a equivalência massa-energia, torna-se absolutamente desnecessário recorrer a qualquer modelo imaginativo, seja mecânico, eletromagnético, ou de qualquer outro tipo, relativo à estrutura da matéria e às interações. De modo converso, a Teoria da Relatividade nada nos diz sobre a estrutura da matéria. De fato, a Relatividade não equivale a mais do que extrair todas as conseqüências da noção de invariância.

(3) Seria interessante efetuar a generalização de nossas considerações sobre a teoria do equilíbrio para processos dinâmicos gerais em que partículas são criadas e aniquiladas em pontos diferentes do espaço-tempo. É de se esperar tantos parâmetros R de curvatura quantas forem as transformações inerciais independentes locais: uma transição temporal, três translações espaciais, três rotações espaciais e três velocidades. Uma variação destes dez parâmetros de curvatura não está de modo algum excluída quando se muda a situação dos referenciais galileanos locais. A única causa externa material com a qual tal variação, se ocorrer, pode ser conectada é a situação relativa do referencial galileano local com respeito às massas circundantes do universo. Assim, a influência das massas distantes – em outros termos, do campo gravitacional – pode ser descrita por um conjunto de dez parâmetros de curvatura: esta abordagem fornecerá uma formulação alternativa na qual inércia e gravitação se fundem em um conceito de ordem superior de tal modo que o movimento inercial é determinado somente pela distribuição das massas distantes.

II – Um esquema dedutivo universal

1) Estática

Consideremos o equilíbrio de uma alavanca sem massa à qual forças perpendiculares de valores m_1, m_2 e $-m_0$ são aplicadas nos pontos x_1, x_2 e x_0, respectivamente. Mach (Mach 19) ressaltou que Arquimedes e muitos pensadores subseqüentes, entre eles Galileu, Stevin e Lagrange, acreditavam ter encontrado uma prova da lei de equilíbrio da alavanca baseada em dois axiomas:

(i) forças iguais aplicadas a braços de alavanca iguais estão em equilíbrio;

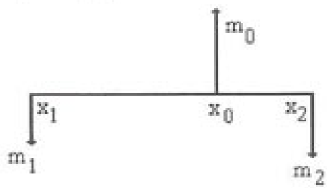
(ii) se as forças são iguais e os braços desiguais, a balança inclina para o lado de maior comprimento.

Mach mostrou que a suposição implícita de

(1) $m_1 + m_2 = m_0$

foi feita por todos eles, e dela se segue a lei usual, que pode ser escrita, por conveniência, na forma de uma lei de conservação:

(2) $m_0 x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2$



O que seria a lei de equilíbrio sem aquela suposição? Procuremos por condições mais gerais de equilíbrio. Se, em vez de (1) e (2), tivermos uma condição de equilíbrio da forma

(1') $m_0 f(x_0) = m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2)$

então numa primeira etapa consideramos a invariância desta condição com respeito à transformação x_i para $-x_i$, que corresponde ou à repetição do mesmo experimento na situação em que os x_i são mudados para $-x_i$ ou a uma mudança de referencial ou de ponto-de-vista-de-observação tal que as novas coordenadas são dadas por aquela mesma transformação. Então, temos juntamente com (1')

(2') $m_0 f(-x_0) = m_1 f(-x_1) + m_2 f(-x_2)$

e definindo $e(x) = f(x) + f(-x)$ e também $p(x) = f(x) - f(-x)$, somando e subtraindo (1') e (2'), obtemos, respectivamente, as regras de conservação equivalentes

(1'') $m_0 \varepsilon(x_0) = m_1 \varepsilon(x_1) + m_2 \varepsilon(x_2)$

(2'') $m_0 p(x_0) = m_1 p(x_1) + m_2 p(x_2)$

onde a "função-força" desconhecida $\varepsilon(x)$ (força resultante) e a função-torque $p(x)$ (momento das forças) são par e ímpar respectivamente. Nossa notação foi escolhida de modo que se evidencie a aplicação à Dinâmica: $\varepsilon(x)$ e $p(x)$ serão respectivamente as funções para energia e para momentum.

Há mais do que duas condições independentes de equilíbrio? Fosse esse o caso, então nunca se poderia obter o equilíbrio de três forças como esquematizado na figura precedente. A resposta só pode ser dada experimentalmente: aqui temos que introduzir como um fato experimental, no sentido de Mach para esta noção, a hipótese de que há efetivamente duas, e não mais, condições independentes de equilíbrio, no caso de forças perpendiculares à alavanca.

Efetuemos agora a análise "relativística" do problema da alavanca simples. As condições de equilíbrio são também invariantes por translação ao longo da direção da alavanca: se escolhemos uma outra origem arbitrária de modo que todas as coordenadas x sejam substituídas por x + y, então para qualquer valor de y as seguintes condições são também satisfeitas

$$\textbf{(1''')}\quad m_0\varepsilon(x_0 + y) = m_1\varepsilon(x_1 + y) + m_2\varepsilon(x_2 + y)$$

$$\textbf{(2''')}\quad m_0p(x_0 + y) = m_1p(x_1 + y) + m_2p(x_2 + y)$$

Esta é uma restrição forte para as funções $p(x)$ e $\varepsilon(x)$. De fato, equações funcionais são prontamente obtidas como condições necessárias, ao se considerar um caso especial:

Braços iguais ($x = x_0 - x_1 = x_2 - x_0$) e forças iguais aplicadas aos extremos ($m = m_1 = m_2$). No "referencial" em que $y = 0$ o torque[1] é zero e a lei de força é:

$$\textbf{(3)}\quad 2m\varepsilon(x) = m_0\varepsilon(0)$$

No "referencial" transladado do comprimento y as duas leis de equilíbrio ficam:

$$\textbf{(4)}\quad m(\varepsilon(y + x) + \varepsilon(y - x)) = m_0\varepsilon(y)$$

$$\textbf{(5)}\quad m(p(y + x) + p(y - x)) = m_0p(y)$$

As razões entre (4) e (3) e entre (5) e (3) dão as equações funcionais (fazemos $\varepsilon(0) = 1$ por conveniência):

$$\textbf{(6)}\quad \varepsilon(y + x) + \varepsilon(y - x) = 2\varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

$$\textbf{(7)}\quad p(y + x) + p(y - x) = 2\varepsilon(x)p(y)$$

A seguinte suposição física permite obter a forma geral das soluções:

Princípio de compensação:

para qualquer distribuição de forças finitas, seja contínua ou não, aplicadas a distâncias finitas ao longo da alavanca, é possível encontrar uma escolha da força compensatória (m_0 , x_0) que produza o equilíbrio. Matematicamente, isto equivale a assumir a integrabilidade das funções $\varepsilon(x)$ e $p(x)$ em qualquer intervalo finito. Pode-se mostrar que o princípio de compensação implica que as funções de força e torque são contínuas e indefinidamente deriváveis (a demonstração está dada no apêndice). Segue-se que a equação funcional (6) pode ser resolvida por diferenciação, e a seguinte solução geral é obtida:

(8) $\varepsilon(x) = \cosh(x/R)$

(9) $p(x) = R\operatorname{senh}(x/R)$

onde R é uma constante universal que toma apenas valores reais ou imaginários.

Exercício:

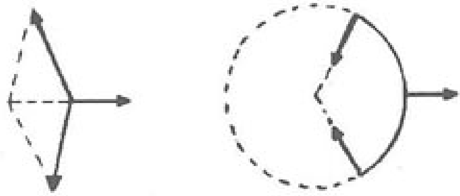
Mostrar que $p(x)$ é proporcional à derivada de $\varepsilon(x)$ – e vice-versa – através da diferença das equações (1''') e (1''), por um lado, e de (2''') e (2'') por outro, no caso em que y é substituído por uma translação infinitesimal dy.

Observações:

a) O fator R de normalização em (9) é escolhido de modo que se recupere a lei de Arquimedes no caso especial de R tendendo ao infinito e no caso mais geral em que $x << R$.

b) A dedução precedente pode ser aplicada, sem qualquer alteração, ao equilíbrio de forças que passam por um mesmo ponto: forças concorrentes ou forças aplicadas perpendicularmente a um arco de círculo.

c) Se se substitui a invariância translacional por outra rotacional, os comprimentos x são substituídos pelos ângulos θ, a periodicidade restringe a constante R a valores imaginários e obtemos $\varepsilon = \cos(n\theta)$, $p = \operatorname{sen}(n\theta)$, onde n pode assumir qualquer valor inteiro: entre as soluções só nos interessa aquela em que $n = 1$. Esta não pode ser "deduzida", e temos que considerá-la como um fato experimental. Mostrarei em outro texto que os casos em que $n \neq 1$ também têm aplicações físicas: de fato, de um modo até bastante inesperado, será mostrado que as considerações precedentes se aplicam, na Mecânica Quântica, a fótons polarizados, com $n = 2$.



Se considerarmos agora forças m_i atuando na alavanca mas paralelamente a ela, as considerações acima, baseadas na invariância, também se aplicam a este caso. Entretanto, neste caso, elas devem conduzir a somente uma lei de equilíbrio. Esta condição deve ser considerada um fato experimental. Como $\varepsilon(x)$ e $p(x)$ são respectivamente proporcionais a dp/dx e a $d\varepsilon/dx$, as regras de conservação (1") e (2") se reduzem a uma só regra de conservação se e somente se $\varepsilon(x)$ for constante e $p(x)$ nula, e, então, a condição de equilíbrio torna-se simplesmente $\Sigma m_i = 0$: como um caso especial, forças iguais e opostas aplicadas a um linha sólida, e paralelas a ela, estão em equilíbrio.

d) Transformações de Lorentz

Escrevamos as fórmulas de transformações das condições de equilíbrio para quando se passa do referencial cuja origem está no ponto O para o referencial cuja origem O' está no ponto -y. Definamos os valores das "quantidades conservadas" $\varepsilon' = \varepsilon(x + y)$, $p' = p(x + y)$ no referencial O'. Estas são dadas como funções de $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $p = p(x)$ pelas relações (tomamos aqui $R = 1$ para simplificar):

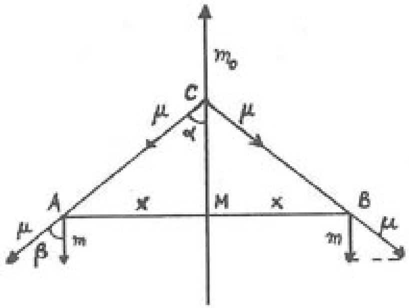
$$\varepsilon' = \varepsilon \cosh y + p \operatorname{senh} y$$
$$p' = \varepsilon \operatorname{senh} y + p \cosh y,$$

que são as fórmulas de transformação dos componentes de um vetor por rotação em um espaço bidimensional de Minkowsky e formam, portanto, um grupo (estas fórmulas são praticamente as mesmas que aquelas da energia e do momentum, ou do tempo e do espaço, quando se muda para um outro referencial galileano com y constituindo um parâmetro aditivo de velocidade, a rapidez). Ver mais adiante.

2) Geometria não-euclidiana

O valor efetivo da constante universal R só pode ser obtido através de medidas. Sua interpretação física requer a consideração de um caso multidimensional. Introduzimos aqui a suposição crucial de que a lei de equilíbrio na forma (1"), (2") com (8) e (9) se aplica qualquer que seja a direção da alavanca, sendo a constante R a mesma em todas as direções: esta suposição, juntamente com a suposição prévia da invariância ao longo da linha reta da alavanca, equivale a postular que todas as propriedades físicas, incluindo aquelas das figuras geométricas, permanecem invariantes sob a ação de algum grupo de transformação. Em nossa abordagem heurística, na qual as propriedades do grupo (invariância) precedem as propriedades métricas (leis físicas), bem no espírito do Erlangen Program de Felix Klein, a forma geral do grupo (ver, por exemplo, 1d) e das leis físicas pode ser deduzida ao mesmo tempo com pouco recurso a experimento restrito a fatos observáveis, que podem ser confirmados sem a realização de medições muito precisas: o número de condições de equilíbrio, os valores de n (um inteiro) e do comprimento absoluto R.

Analisemos o experimento bidimensional em que a força compensadora m_0, aplicada no vértice C do triângulo sólido ABC, e forças iguais m são aplicadas a B e A.



A aplicação de forças m , equivalente àquela de forças

(10) $\mu = m / \cos \beta$

ao longo das linhas retas AC e BC (aplicação de 1b).

O equilíbrio da linha sólida AC requer a aplicação de forças opostas em suas duas extremidades, e o mesmo vale para BC (aplicação de 1c).

As três forças aplicadas no vértice C se anulam, dando

(11) $m_0 = 2 \mu \cos \alpha$

Assim, a condição de equilíbrio toma a forma

(12) $m_0 = 2 m \cos \alpha / \cos \beta$

Uma vez que a força compensatória poderia, sem alterações, estar aplicada no vértice C ou no ponto médio M de AB (porque forças opostas aplicadas nas extremidades de uma linha sólida e paralelas a esta se anulam quando se tem equilíbrio), a condição de equilíbrio, tal como antes, é também

(13) $m_0 = 2 m \cosh x/R$

Comparando as formas (12) e (13) da condição de equilíbrio, obtemos a relação puramente geométrica

(14) $\cos \alpha / \cos \beta = \cosh x/R$

A soma dos ângulos do triângulo ACM é $\pi + \alpha - \beta$. Como $\alpha < \beta$, se R é real, $\alpha > \beta$, se R é imaginário e $\alpha = \beta$ no limite de R tendendo ao infinito, obtemos a seguinte classificação de geometrias de acordo com o valor de R, que assim se revela ser a curvatura do espaço:

R real:	geometria de Lobachevski
R imaginário:	geometria esférica
$\|R\|$:	geometria euclidiana

Levando o ponto C para cima ou para baixo ao infinito (o que somente é possível quando R é real), obteremos duas paralelas a CM através do ponto A.

Quando $\alpha \to 0$, o ângulo β tende a um limite β_0 dado por

(15) $\cos \beta_0 = 1 / \cosh (x/R)$

ou, de modo equivalente, através da famosa fórmula de Lobachevski para o ângulo de paralelismo

$$\textbf{(16)}\quad \text{tang}\,(\pi/2 - \beta_0)\,/\,2 = \exp{-x/R}$$

(Complementos concernentes à Estática não-euclidiana podem ser encontrados em Andrade 1.)

3) Dinâmica de colisões de partículas

O esquema dedutivo precedente para as leis da Estática pode ser transposto mudando-se apenas as palavras. Como este tópico será tratado em detalhe num próximo artigo, daremos aqui somente um esboço a fim de mostrar no que consiste a analogia. De fato, as colisões de partículas são processos locais nos quais as velocidades possíveis são restringidas pelas leis da conservação da mesma forma que na Estática. A transposição é possível devido à existência da rapidez (1), um parâmetro aditivo de velocidade ao longo de qualquer geodésica, que é associado ao que algumas vezes é chamado "invariância relativística", isto é, a transformação de velocidade de um referencial galileano para outro. O parâmetro m se torna a massa das partículas e as fórmulas (1") e (2") são, respectivamente, as leis de conservação da energia e do momentum, cujas expressões são dadas por

$$\varepsilon(x) = \cosh(x)$$

e

$$p(x) = \text{senh}\,(x)$$

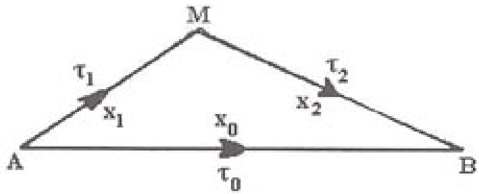
em termos da rapidez x. A velocidade efetiva está relacionada com a rapidez pela fórmula estabelecida na referência (1) e que será recuperada na próxima seção:

$$\textbf{(17)}\quad v = c\ \text{tangh}\,(x)$$

Pode-se mostrar que o espaço de velocidade é um espaço de Lobachevski cuja curvatura é a constante c da fórmula precedente. Esta constante se mostra ser a máxima velocidade de qualquer propagação de energia que, tal como R, só pode ser determinada através de medidas. Recuperamos a Dinâmica Relativística especial, prescindindo do princípio de invariância da velocidade da luz.

4) Cinemática

Propriedades métricas de intervalos espaço-tempo podem também ser investigadas de uma maneira inteiramente análoga, por meio de regras de conservação. Considere-se, por exemplo, dois viajantes iniciando simultaneamente uma jornada no ponto A e se encontrando de novo simultaneamente no ponto B. O primeiro viaja com velocidade constante de A para o ponto intermediário M, e a seguir de M para B com outra velocidade constante. O segundo viaja diretamente de A para B também com velocidade constante. Uma vez que as coincidências nos pontos finais são absolutas, qualquer observador, esteja em repouso ou em movimento, concordará com as "conservações" do tempo decorrido e da distância percorrida AB para os dois caminhos de viagem de A para B.



Se escrevemos as funções de tempo e espaço na forma

$$t = \tau \ \varepsilon(x)$$

e

$$r = \tau \ p(x)$$

as "conservações" de espaço e tempo tomam em uma dimensão uma forma análoga às leis de equilíbrio (1') e (2') da alavanca, em que x e m são agora substituídos respectivamente pela rapidez e pelo tempo-próprio *(eigen-time)* (o tempo indicado pelo relógio do viajante), então obtemos imediatamente

$$\varepsilon \sim \cosh (x),$$
$$p \sim \text{senh } (x),$$
$$v = r/t \sim \text{tangh } (x)$$

É fácil derivar a transformação de Lorentz a partir dessas expressões.

III – Apêndice

Toda solução mensurável (localmente integrável) das equações funcionais (6) e (7) é contínua e derivável para qualquer ordem. Consideremos (6); o tratamento de (7) é análogo. Seja c(y) uma função positiva, nula fora de um domínio limitado arbitrário, e indefinidamente derivável. Multiplicando os dois membros da equação funcional (6) por c(y), e depois integrando com relação a y, obtemos:

$$2\,\varepsilon(x) \int \varepsilon(y)\, c(y)\, dy = \int \varepsilon(x+y)\, c(y)\, dy + \int \varepsilon(x-y)\, c(y)\, dy$$

Certificamo-nos facilmente que as integrais escritas são bem definidas quando $\varepsilon(x)$ é uma função mensurável. Por mudança de variável, o membro da direita fica da forma seguinte (com $c(y) = c(-y)$ para simplificar):

$$\int (\varepsilon(y) + \varepsilon(-y))\, c(y-x)\, dy$$

e concluímos que ele é contínuo e derivável para todas as ordens com respeito a x. Como decorrência, a função $\varepsilon(x)$ no membro esquerdo tem a mesma propriedade.

Abstract: This article analyses the question of physical reference frame, especially what concerns the conditions of applicability of physical laws to situations where it is possible the reproduction of phenomena. It is shown, in several cases, that considerations of symmetry and transformations of invariance have a fundamental role in physical science and impose serious restrictions to the form of physical laws and principles.
Key-words: physical reference frame – invariance – relativity – philosophy of physics

Notas

(1) "Torque": momento das forças (par de forças, em metros x kgf); "função-força": resultante das forças (unidade: kgf ou newton).

Referências Bibliográficas

1. ANDRADE, J. *Géometrie et Statique Non-Euclidiènne,* 1898.
2. ARQUIMEDES. *De l'Équilibre ou des Centres de Gravité des Figures Planes.*
3. BONOLA, R. *La Geometria Non-Euclidea, Esposizione Storico-Critico del suo Sviluppo,* 1906.
4. BORN, M. *Einstein's Theory of Relativity.* Nova York, Dover, 1962.
5. COMTE, C. *European Journal of Physics,* 7, 1986.
6. d'ALEMBERT. *Traité de Dynamique,* 1743.
7. _______. *Elements de Philosophie,* 1759.
8. _______. *Opuscules Mathématiques,* mémorie 51, tome IV, 1777.
9. DARBOUX. "Sur la Composition des Forces en Statique". In: *Bulletin des Sciences Mathématiques,* tome IX, juillet-décembre, 1875.
10. DAVIET DE FONCENEX. *Sur les Principes Fondamentaux de la Statique.* Torino, Miscellanea Taurinensia (Mélanges Turinois), 1761.

11. EINSTEIN, A. & INFELD, L. *L'Évolution des Idées en Physique*. Paris, Flammarion.

12. EINSTEIN, A. *La Relativité Restreinte et Générale*.

13. _______. *Ann. Phys.*, 49, 1917.

14. _______. *Ann. Phys.*, 55, 1918, 241.

15. GENOCCI, A. "Sur un Mémorie de Daviet de Foncenex et sur les Géometries Non-Euclidiènnes". In: *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, lu dans la séance du 13 mai 1877.

16. KLEIN, F. *Le Programme d'Erlangen*. Paris, Gauthier-Villars, 1974.

17. KRETSCHMANN, E. *Ann. Phys.*, 53, 1917, 575.

18. LEVY-LEBLOND, J.M. *American Journal of Physics*, 44, 1976, 271.

19. MACH, E. *Die Mechanik*, 1883.

20. NEWTON, I. *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*. (Tradução do latim pela Madame Marquesa de Chastelet, 1759).

21. POISSON. *Mécanique Rationelle*, 1830.