DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
Diretor: Prof. Dr. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho

SOBRE A DETERMINAÇÃO DE UM MOMENTO DE ORDEM QUALQUER DE UM MOMENTO CENTRADO GENÉRICO DE UMA AMOSTRA SUPOSTA PROVENIENTE DE UMA ESPECIFICADA POPULAÇÃO NORMAL A k DIMENSÕES.

ELZA SALVATORI BERQUÓ

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve origem em uma questão que nos foi proposta durante o curso de Estatística Matemática ministrado pelo Prof. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho. Tendo ele nos encarregado de discutir a determinação dos valores da esperança e da variância das características amostrais g_1 e g_2 vimo-nos compelidos a consultar o trabalho de Geary, citado por Cramér, no qual o primeiro dêstes autores demonstra a independência entre as variáveis aleatórias $\bar{x}$, s e $(m_\nu m_2^{-\frac{\nu}{2}})$. Surgiu-nos, então, a idéia da possibilidade de generalizar os resultados perquirindo o que aconteceria no caso de uma amostra proveniente de uma especificada população normal a k dimensões.

Foi-nos sobremaneira entusiasmante o verificar que esta generalização era perfeitamente exequível e nos conduzia a um resultado que não encontramos similar na literatura.

A originalidade assim conseguida, aliada à grande messe de importantes corolários conseguíveis, convenceu-nos imediatamente que o assunto merecia as honras de uma tese.

Registramos, com imenso prazer, a dedicação e competência externadas pelo Prof. Pedro Egydio de Oliveira Carvalho na orientação dêste trabalho. A êle, tôda a nossa gratidão.

Tese de concurso à livre docência da cadeira de Bioestatística da Faculdade de Higiene e Saúde Pública da Universidade de São Paulo, aprovada em abril de 1951. Entregue para publicação em dezembro de 1951.

§ 1 —

Seja

$$x_{1\nu}, x_{2\nu}, \ldots, x_{k\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

uma amostra de tamanho n suposta proveniente de uma população normal k dimensional, com médias

$$0, 0, \ldots, 0$$

e matriz das covariâncias especificada por:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

Notemos, inicialmente, que para a questão que se tem em vista, os valores particulares 0 e 1, supostos serem a média e o desvio padrão de um dos componentes do vetor populacional, não constituem perda de generalidade, pois, em contrário, se fôssem êles m_i e σ_i bastaria definir a variável reduzida $\frac{\xi_i - m_i}{\sigma_i}$ para recairmos no caso aqui considerado.

Definamos o momento amostral centrado de ordem $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$:

$$m_{p_1 p_2 \ldots p_k} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (x_{1\nu} - \bar{x}_1)^{p} \ldots (x_{k\nu} - \bar{x}_k)^{p_k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{1\nu}^{p_1} \ldots \delta_{k\nu}^{p_k}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \delta_{i\nu}^{p_i}$$

em que:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu}$$

$$\delta_{i\nu} = x_{i\nu} - \bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

O problema que pretendemos abordar é o da determinação do valor de:

$$(1) \qquad \alpha_r (m_{p_1} \ldots p_k) = E (m_{p_1} \ldots p_k)^r = \frac{1}{n^r} E \left[\sum_{\nu=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \delta_{i\nu}^{p_i} \right]^r$$

ou seja, em palavras, o momento não centrado, de ordem r do momento amostral centrado de ordem p: $m_{p_1 \ldots p_k}$.

Da (1), segue, pelo desenvolvimento de Leibnitz:

$$(2) \qquad \alpha_r (m_{p_1} \dots p_k) = \frac{1}{n^r} E \sum_{r_1+\dots+r_n=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \prod_{i,\nu}^{k,n} \delta_{i\nu}^{p_i r_\nu}$$

a somatória sendo estendida a tôdas as soluções inteiras não negativas da equação:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

Mas, subsistindo:

$$\sum_{r_1+\dots+r_n=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_n!} \prod_{i,\nu}^{k,n} \delta_{i\nu}^{p_i r_\nu} =$$

$$= \sum_{e=1}^{r} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_e!} \sum_{\gamma_e > \dots > \gamma_1 = 1}^{n} \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{i\gamma_h}^{p_i r_h}$$

em que $r_1, \dots, r_e$ constitue uma e partição própria de r e, portanto $r_h > 0$ ($h = 1, 2, \dots, e$); tem-se, por substituição na (2):

$$(3) \quad \alpha_r (m_{p_1} \dots p_k) = \frac{1}{n^r} \sum_{e=1}^{r} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_e!} \sum_{\gamma_e > \dots > \gamma_1 = 1} E \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{i\gamma_h}^{p_i r_h}$$

Notando que para qualquer conjunto $\gamma_1 \dots \gamma_e$, a esperança figurante na (3) é sempre a mesma, pode-se escrever:

$$\sum_{\gamma_e > \dots > \gamma_1 = 1}^{n} E \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{i\gamma_h}^{p_i r_h} = \binom{n}{e} E \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{ih}^{p_i r_h}$$

Assim sendo, a (3) torna-se:

$$(4) \quad \alpha_r (p_1 \dots p_k) = \frac{1}{n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_e!} E \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{ih}^{p_i r_h}$$

Êste resultado mostra que a solução do problema proposto fica na dependência exclusiva da determinação de:

$$(5) \qquad E \prod_{i,h}^{k,e} \delta_{ih}^{p_i r_h}$$

Esta questão foi tratada para o particular caso de uma amostra proveniente de um universo normal unidimensional por Geary. Êste autor, em um artigo publicado na "Misselânea" da Biometrika de 1933, página 184, dá as linhas gerais do método por êle empregado para atingir tal objetivo. Seguindo estas indicações que, não se pode negar, são bastante vagas, passaremos, generalizando e dando pormenores à determinação da (5).

Para tanto, comecemos por considerar o valor da função geradora de momentos do vetor com n.k componentes:

$$(\delta_{11}, \ldots \delta_{k1}), (\delta_{12}, \ldots, \delta_{k2}), \ldots, (\delta_{1n}, \ldots \delta_{kn})$$

Tem-se:

$$E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \delta_{i\nu} t_{i\nu}} = E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (x_{i\nu} - \bar{x}_i)\, t_{i\nu}}$$

$$= E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (x_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu})\, t_{i\nu}}$$

$$= E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{i\nu} t_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (x_{i1} + \ldots + x_{in})\, t_{i\nu}}$$

$$= E\, e^{\sum_{i=1}^{k} x_{i1} (t_{i1} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}) + \ldots + \sum_{i=1}^{k} x_{in} (t_{in} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu})}$$

$$= E \prod_{\nu=1}^{n} e^{\sum_{i=1}^{k} x_{i\nu} (t_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu})},$$

ou seja, usando o fato da inter-independência assegurada pela hipótese:

$$(6) \qquad E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \delta_{i\nu} t_{i\nu}} = \prod_{\nu=1}^{n} E\, e^{\sum_{i=1}^{k} x_{i\nu} (t_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu})}$$

Lembrando, agora, que para o caso de uma distribuição normal k dimensional com variáveis independentes:

$$E\, e^{\sum_{j=1}^{k} t_j x_j} = e^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} t_j^2}$$

então, a (6) torna-se:

$$E\, e^{\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \delta_{i\nu} t_{i\nu}} = \prod_{\nu=1}^{n} e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (t_{i\nu} - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu})^2}$$

$$= \prod_{\gamma=1}^{n} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left[t_{i\gamma}^{2} - \frac{2}{n}\, t_{i\gamma}\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu} + \frac{1}{n^{2}}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2} - \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\cdot\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu} + \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]}$$

$$(7) \qquad = e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2} - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]}$$

Desenvolvendo-se em série ambos os membros da (7), tem-se, de um lado:

$$E\; e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\delta_{i\nu} t_{i\nu}} = E\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\delta_{i\nu} t_{i\nu}\right)^{l}}{l!}$$

$$(8) \qquad = \sum_{l=0}^{\infty}\;\sum_{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{n} l_{i\nu}=l}\frac{1}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n}\left(l_{i\nu}\right)!}\prod_{i,\nu}^{k,n} t_{i\nu}^{l_{i\nu}}\cdot E\left(\prod_{i,\nu}^{k,n}\delta_{i\nu}^{l_{i\nu}}\right)$$

e, de outro lado:

$$e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2} - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]} =$$

$$= \sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\omega}}\,\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2} - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]^{\omega}}{\omega!}$$

$$(9) \quad = \sum_{\omega=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\omega}\,\omega!}\sum_{s=0}^{\omega}\binom{\omega}{s}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2}\right)^{s}\left(-\frac{1}{n}\right)^{\omega-s}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]^{\omega-s}$$

Mas:

$$\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}^{2}\right]^{s} = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_{i\nu}=s}\frac{s!}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n}(s_{i\nu})!}\prod_{i,\nu}^{k,n} t_{i\nu}^{2 s_{i\nu}}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^{2}\right]^{\omega-s} = \sum_{q_1+\ldots+q_k=\omega-s}\frac{(\omega-s)!}{q_1!\ldots q_k!}\left(\sum_{\nu=1}^{n} t_{1\nu}\right)^{2q_1}\cdots\left(\sum_{\nu=1}^{n} t_{k\nu}\right)^{2q_k}$$

$$= \sum_{q_1+\ldots+q_k=\omega-s}\frac{(\omega-s)!}{q_1!\ldots q_k!}\prod_{j=1}^{k}\;\sum_{\mu_{j1}+\ldots+\mu_{jn}=2q_j}\frac{(2q_j)!}{\mu_{j1}!\ldots\mu_{jn}!}\prod_{\gamma=1}^{n} t_{j\gamma}^{\mu_{j\gamma}}$$

Substituindo-se em (9), vem:

$$e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu} - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} t_{i\nu}\right)^2\right]} =$$

$$= \sum_{\omega=o}^{\infty} \frac{1}{2^{\omega}\,\omega!} \sum_{s=o}^{\omega} \binom{\omega}{s} \left(-\frac{1}{n}\right)^{\omega-s} \sum_{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_{i\nu}=s} \frac{s!}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n} (s_{i\nu})!} \prod_{i,\nu}^{\kappa,n} t_{i\nu}^{2 s_{i\nu}} \times$$

$$\times \sum_{q_1+\ldots+q_k=\omega-s} \frac{(\omega-s)!}{q_1!\ldots q_k!} \prod_{j=1}^{k} \left[\sum_{\mu_{j1}+\ldots+\mu_{jn}=2q_j} \frac{(2q_j)!}{\mu_{j1}!\ldots\mu_{jn}!} \prod_{\gamma=1}^{n} t_{j\gamma}^{\mu_{j\gamma}}\right]$$

$$= \sum_{\omega=o}^{\infty} \frac{1}{2^{\omega}} \sum_{s=o}^{\omega} \left(-\frac{1}{n}\right)^{\omega-s} \sum_{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_{i\nu}=s} \frac{1}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n} (s_{j\nu})!} \times$$

$$\times \sum_{q_1+\ldots+q_k=\omega-s} \frac{1}{q_1!\ldots q_k!} \prod_{j=1}^{k} \left[\sum_{\mu_{j1}+\ldots+\mu_{jn}=2q_j} \frac{(2q_j)!}{\mu_{j1}!\ldots\mu_{jn}!} \times \prod_{\nu=1}^{n} t_{j\nu}^{2s_{j\nu}+\mu_{j\nu}}\right]$$

(10)

Tendo em vista que:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu_{j\nu} = 2\,q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots k)$$

então, a (10) só contem têrmos em t, cuja soma dos expoentes é um número par. Desta observação e da identidade em t da (8) e (10) assegurada pela (7), resulta imediatamente que sob a condição:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n} l_{i\nu} = \text{número impar}$$

tem-se:

$$E \prod_{i,\nu}^{k,n} \delta_{i\nu}^{l_{i\nu}} = 0 \qquad (11)$$

Notando, agora, que em (5):

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{h=1}^{e} p_i\, r_h = r \sum_{i=1}^{k} p_i$$

então, a conclusão supra permite, levando em conta a (4), afirmar que:

$$\alpha_r\,(m_{p_1}\ldots{}_{p_k}) = 0$$

se $$r \,.\, \sum_{i=1}^{k} p_i = \text{número impar}$$

Ainda como conseqüência da nulidade da (11) segue a possibilidade de dar à (8) a fórma:

$$(12) \qquad E\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} \delta_{i\nu} t_{i\nu}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k}} \frac{1}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n} (l_{i\nu})!} \prod_{i,\nu}^{k,n} t_{i\nu}^{l_{i\nu}} \times E\left(\prod_{i,\nu}^{k,n} \delta_{i\nu}^{l_{i\nu}}\right)$$

Passemos, a seguir, a identificar os coeficientes de:

$$\prod_{i,\nu}^{k,n} t_{i\nu}^{l_{i\nu}} .$$

nas (10) e (12).

Consideremos, na (12) um conjunto fixado de valores dos $l_{i\nu}$ e, portanto um valor fixo l. Com isto:

$$(13) \qquad 2\, s_{j\nu} + \mu_{j\nu} = l_{j\nu}$$

para quaisquer j e ν.

Ainda, da unicidade do desenvolvimento em série segue, na (10):

$$l = \omega$$

$$\sum_{i=1}^{k} q_i = l - s$$

Por último, notemos que da (13) segue que para um conjunto fixado dos $s_{j\nu}$ os $\mu_{j\nu}$ e com êles os q_j tornam-se fixos, pois os $l_{j\nu}$ já são fixados, e dados respectivamente, por:

$$\mu_{j\nu} = l_{j\nu} - 2\, s_{j\nu}$$

$$2\, q_j = \sum_{\nu=1}^{n} l_{j\nu} - 2 \sum_{\nu=1}^{n} s_{j\nu}$$

Posto isto, podemos escrever para coeficientes de:

$$\prod_{i,\nu}^{k,n} t_{i\nu}^{l_{i\nu}}$$

na (12):

$$\frac{E\left(\prod\limits_{i,\nu}^{k,n} \delta_{i\nu}^{l_{i\nu}}\right)}{\prod\limits_{i,\nu}^{k,n} (l_{i\nu})!}$$

e, na (10):

$$\frac{1}{2^l}\sum_{s=o}^{l}\left(-\frac{1}{n}\right)^{l-s}\sum_{\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n}s_{i\nu}=s}\frac{1}{\pi_{i,\nu}^{k,n}(s_{i\nu})!}\cdot\frac{1}{\pi_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}l_{j\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}s_{j\nu}\right]!}\times$$

$$\times\frac{\pi_{j=1}^{k}\left[\sum_{\nu=1}^{n}l_{j\nu}-2\sum_{\nu=1}^{n}s_{j\nu}\right]!}{\pi_{j,\nu}^{k,n}\left[l_{j\nu}-2s_{j\nu}\right]!}$$

e, portanto:

$$\frac{E\left(\pi_{i,\nu}^{k,n}\delta_{i\nu}^{l_{i\nu}}\right)}{\pi_{i,\nu}^{k,n}(l_{i\nu})!}=\frac{1}{2^l}\sum_{s=o}^{l}\left(-\frac{1}{n}\right)^{l-s}\sum_{\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n}s_{i\nu}=s}\frac{1}{\pi_{i,\nu}^{k,n}(s_{i\nu})!}\times$$

$$(14)\qquad\times\frac{1}{\pi_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}l_{j\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}s_{j\nu}\right]!}\times\frac{\pi_{j=1}^{k}\left[\sum_{\nu=1}^{n}l_{j\nu}-2\sum_{\nu=1}^{n}s_{j\nu}\right]!}{\pi_{j,\nu}^{k,n}\left[l_{j\nu}-2s_{j\nu}\right]!}$$

Da (14) segue imediatamente, para valor da (5), fazendo:

o índice $n = e$

$$l_{i\nu} = p_i\, r_h \qquad (\nu = h = 1, 2, \ldots, e)$$

$$2\,l = \sum_{i=1}^{k}\sum_{h=1}^{e} l_{i\nu} = r\sum_{i=1}^{k} p_i = rp = 2\,q$$

$$\frac{E\ \pi_{j,h}^{k,e}\delta_{jh}^{p_j r_h}}{\pi_{j,h}^{k,e}(p_j\,r_h)!}=\frac{1}{2^q}\sum_{s=o}^{q}\left(-\frac{1}{n}\right)^{q-s}\sum_{\sum_{j=1}^{k}\sum_{h=1}^{e}s_{jh}=s}\frac{1}{\pi_{j,h}^{k,e}(s_{jh})!}\times$$

$$\times\frac{\pi_{j=1}^{k}\left[\sum_{h=1}^{e}p_j\,r_h-2\sum_{h=1}^{e}s_{jh}\right]!}{\pi_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{e}p_j\,r_h-\sum_{h=1}^{e}s_{jh}\right]!\ \pi_{j,h}^{k,e}\left[p_j\,r_h-2\,s_{jh}\right]!}$$

Daqui segue, finalmente, por substituição na (14):

$$\alpha_r (m_{p_1} \ldots p_k) = \frac{r!}{2^q n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1 + \ldots + r_e = r} \frac{\prod_{j,h}^{k,e} (p_j r_h)!}{r_1! \ldots r_e!} \times$$

(15)

$$\times \sum_{s=0}^{q} \left(-\frac{1}{n}\right)^{q-s} \sum_{\sum_{j=1}^{k} \sum_{h=1}^{e} s_{jh} = s} \frac{\prod_{j=1}^{k} \left[p_j r - 2 \sum_{h=1}^{e} s_{jh} \right]!}{\prod_{j=1}^{k} \left[\frac{p_j r}{2} - \sum_{h=1}^{e} s_{jh} \right]! \prod_{j,h}^{k,e} (s_{jh})! (p_j r_h - 2 s_{jh})!} .$$

Na aplicação desta fórmula devemos ter sempre presente que, enquanto $r_1, \ldots, r_e$ constitui uma *e* partição própria de r e, portanto $r_h > o$ ($h = 1, 2, \ldots, e$), $s_{11}, \ldots, s_{ke}$ constitue uma partição de s tal que :

$$\frac{p_j r}{2} - \sum_{h=1}^{e} s_{jh} \qquad (j = 1, 2,, \ldots, k$$

seja um inteiro não negativo.

Em particular, para $k = 1$ e $p_1 = p$, vem:

$$\alpha_r (m_p) = \frac{r!}{2^q n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1 + \ldots + r_e = r} \frac{(pr_1)! \ldots (pr_e)!}{r_1! \ldots r_e!} \times$$

(16)

$$\times \sum_{s=0}^{q} \left(-\frac{1}{n}\right)^{q-s} \sum_{s_1 + \ldots + s_e = s} \frac{(2q - 2s)!}{(q-s)!\, s_1!\, (pr_1 - 2 s_1)!) \ldots s_e!\, (pr_e - 2 s_e)!}$$

em que se fêz: $s_{1h} = s_h$ ($h = 1, 2, \ldots, e$).

A (16) constitui, com ligeira modificação formal, a fórmula de Geary, já aludida acima.

Para $k = 2$, a (15) torna-se:

$$\alpha_r (m_{p_1 p_2}) = \frac{r!}{2^q n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1 + \ldots + r_e = r} \frac{(p_1 r_1)! \ldots (p_1 r_e)!\, (p_2 r_1)! \ldots (p_2 r_e)!}{r_1! \ldots r_e!}$$

$$\times \sum_{s=0}^{q} \left(-\frac{1}{n}\right)^{q-s} \sum_{\sum_{h=1}^{e} (s_{1h} + s_{2h}) = s} \frac{(p_1 r - 2 \sum_{h=1}^{e} s_{1h})!\, (p_2 r - 2 \sum_{h=1}^{e} s_{2h})!}{\left(\frac{p_1 r}{2} - \sum_{h=1}^{e} s_{1h}\right)! \left(\frac{p_2 r}{2} - \sum_{h=1}^{e} s_{2h}\right)!} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{h=1}^{e} s_{1h}!\, s_{2h}!\, (p_1 r_h - 2 s_{1h})!\, (p_2 r_h - 2 s_{2h})!} \tag{17}$$

§ 2 — *Aplicações para o caso unidimensional.* —

2.0 — Pretendemos, neste parágrafo, utilizando a (16), determinar os valores de $\alpha_r(m_p)$ para $r = 1, 2, 3, 4$ e $p = 2, 3, 4$.

2.1 — Para $r = 1$, $\alpha_1(m_3) = 0$. Assim sendo, tem-se, fazendo $p = 2h$:

$$\alpha_1(m_{2h}) = \frac{(2h)!}{2^h} \sum_{s=o}^{h} \left(-\frac{1}{n}\right)^{h-s} \frac{1}{s!\,(h-s)!} \tag{18}$$

Da (18) segue, fazendo $h = 1, 2$:

$$\alpha_1(m_2) = \sum_{s=o}^{1} \left(-\frac{1}{n}\right)^{1-s} \frac{1}{s!\,(1-s)!} = -\frac{1}{n} + 1 = \frac{n-1}{n}$$

$$\alpha_1(m_4) = \frac{4!}{4} \sum_{s=o}^{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^{2-s} \frac{1}{s!\,(2-s)!} = 6\left[\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3(n-1)^2}{n^2}$$

2.2 — Para $r = 2$, tem-se:

$$\alpha_2(m_p) = \frac{2!}{2^p n^2} \sum_{e=1}^{2} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\ldots+r_e=2} \frac{pr_1)!\ \ldots\ (pr_e)!}{r_1!\ \ldots\ r_e!} \times$$

$$\times \sum_{s=o}^{p} \left(-\frac{1}{n}\right)^{p-s} \frac{(2p-2s)!}{(p-s)!} \sum_{s_1+\ldots+s_e=s} \frac{1}{s_1!\,(pr_1-2s_1)!\ldots s_e!\,(pr_e-2s_e)!}$$

ou seja:

$$\alpha_2(m_p) = \frac{1}{2^p n} \left\{ (2p)! \sum_{s=o}^{p} \left(-\frac{1}{n}\right)^{p-s} \frac{1}{s!\,(p-s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)(p!)^2 \sum_{s=o}^{p} \left(-\frac{1}{n}\right)^{p-s} \frac{(2p-2s)!}{(p-s)!} \times \tag{19}$$

$$\left. \times \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(p-2s_1)!\,s_2!\,(p-2s_2)!} \right\}$$

Fazendo na (19) $p = 2$, vem:

$$\alpha_2 (m_2) = \frac{1}{4\,n} \left\{ 4!\ \sum_{s=o}^{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^{2-s} \frac{1}{s!\,(2-s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)\,(2!)^2 \sum_{s=o}^{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^{2-s} \frac{(4-2\,s)!}{(2-s)!} \times$$

$$\left. \times \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(2-s_1)!\,s_2!\,(2-2\,s_2)!} \right\}$$

$$= \frac{1}{4\,n} \left\{ \left[\frac{12}{n^2} - \frac{12\,(n-1)}{n^2}\right] + \left[-\frac{24}{n} - \frac{8\,(n-1)}{n}\right] + \left[12 + 4\,(n-1)\right] \right\}$$

$$= \frac{n^2-1}{n^2}$$

Ainda na (19) fazendo $p = 3$, vem:

$$\alpha_2 (m_3) = \frac{1}{2^3\,n} \left\{ 6!\ \sum_{s=o}^{3} \left(-\frac{1}{n}\right)^{3-s} \frac{1}{s!\,(3-s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)\,(3!)^2 \sum_{s=o}^{3} \left(-\frac{1}{n}\right)^{3-s} \frac{(6-2\,s)!}{(3-s)!} \times$$

$$\left. \times \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(3-2\,s_1)!\,s_2!\,(3-2\,s_2)!} \right\}$$

$$= \frac{1}{8\,n} \left\{ \left[-\frac{120}{n^3} - \frac{120\,(n-1)}{n^3}\right] + \left[\frac{360}{n^2} - \frac{144\,(n-1)}{n^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{360}{n} - \frac{72\,(n-1)}{n}\right] + \left[120\right] \right\} = \frac{6\,(n-1)\,(n-2)}{n^3}$$

Finalmente, para $p = 4$, a (19) torna-se:

$$\alpha_2 (m_4) = \frac{1}{2^4 . n} \left\{ 8!\ \sum_{s=o}^{4} \left(-\frac{1}{n}\right)^{4-s} \frac{1}{s!\,(4-s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)\,(4!)^2 \sum_{s=o}^{4} \left(-\frac{1}{n}\right)^{4-s} \frac{(8-2\,s)!}{(4-s)!} \times$$

$$\left. \times \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(4-2\,s_1)!\,s_2!\,(4-2\,s_2)!} \right\}$$

$$= \frac{1}{16\,n} \left\{ \left[\frac{1.680}{n^4} + \frac{1.680\,(n-1)}{n^4} \right] + \left[-\frac{6.720}{n^3} - \frac{2.880\,(n-1)}{n^3} \right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{10.080}{n^2} + \frac{2.016\,(n-1)}{n^2} \right] + \left[\frac{6.720}{n} + \frac{576\,(n-1)}{n} \right] +$$

$$\left. + \left[1.680 + 144\,(n-1) \right] \right\}$$

$$\alpha_2\,(m_4) = \frac{3\,(n-1)\,(3\,n^3 + 23\,n^2 - 63\,n + 45)}{n^4}$$

2.3 — Para $r = 3$, $\alpha_3\,(m_3) = o$. Assim sendo, fazendo $p = 2h$, vem:

$$\alpha_3\,(m_{2h}) = \frac{3!}{2^{3h}\,n^3} \sum_{e=1}^{3} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\ldots+r_e=3} \frac{(2\,h\,r_1)!\ldots(2\,h\,r_e)!}{r_1!\ldots r_e!} \times$$

$$\times \sum_{s=o}^{3h} \left(-\frac{1}{n}\right)^{3h-s} \frac{(6\,h-2\,s)!}{(3\,h-s)!} \times$$

$$\times \sum_{s_1+\ldots+s_e=s} \frac{1}{s_1!\,(2\,h\,r_1-2\,s_1)!\ldots s_e!\,(2\,h\,r_e-2\,s_e)!}$$

$$\alpha_3\,(m_{2h}) = \frac{3!}{2^{3h}\,n^2} \sum_{s=o}^{3h} \left(-\frac{1}{n}\right)^{3h-s} \frac{(6\,h-2\,s)!}{(3\,h-s)!} \times$$

$$\times \left\{ \frac{(6\,h)!}{3!} \frac{1}{s!\,(6\,h-2\,s)!} + (n-1) \frac{(4\,h)!\,(2\,h)!}{2!} \times \right.$$

$$\times \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(4\,h-2\,s_1)!\,s_2!\,(2\,h-2\,_2)!} +$$

(20)

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)}{3!} \left[(2\,h)! \right]^3 \times$$

$$\left. \times \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{1}{s_1!\,(4\,h-2\,s_1)!\,s_2!\,(4\,h-2\,s_2)!\,s_3!\,(4\,h-2\,s_3)} \right\}$$

Para $h = 1$, a (20) torna-se:

$$\alpha_3\,(m_2) = \frac{3}{4\,n^2} \sum_{s=o}^{3} \left(-\frac{1}{n}\right)^{3-s} \frac{(6-2\,s)!}{(3-s)!} \left\{ \frac{6!}{3!} \frac{1}{s!\,(6-2\,s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)\, 4! \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(4-2s_1)!\,s_2!\,(2-2s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{3!} .8 \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{1}{s_1!\,(2-2s_1)!\,s_2!\,(2-2s_2)!\,s_3!\,((2-2s_3)!} \Bigg\}$$

$$= \frac{3}{4\,n^2} \Bigg\{ \left[-\frac{20}{n^3} - \frac{60\,(n-1)}{n^3} - \frac{20\,(n-1)\,(n-2)}{n^3} \right] +$$

$$+ \left[\frac{60}{n^2} + \frac{84\,(n-1)}{n^2} + \frac{12\,(n-1)\,(n-2)}{n^2} \right] +$$

$$+ \left[-\frac{60}{n} - \frac{36\,(n-1)}{n} - \frac{4\,(n-1)\,(n-2)}{n} \right] +$$

$$+ \left[20 + 12\,(n-1) + \frac{4}{3}\,(n-1)\,(n-2) \right] \Bigg\}$$

$$\alpha_3\,(m_2) = \frac{(n-1)\,(n+1)\,(n+3)}{n^3}$$

Para $h = 2$, a (20) torna-se:

$$\alpha_3\,(m_4) = \frac{3!}{2^6\,n^2} \sum_{s=0}^{6} \left(-\frac{1}{n} \right)^{6-s} \frac{(12-2s)!}{(6-s)!} \Bigg\{ \frac{12!}{3!} \frac{1}{s!\,(12-2s)!} +$$

$$+ (n-1) \frac{8!\,4!}{2!} \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(8-2s_1)!\,s_2!\,(4-2s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{3!} [4!]^3 \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{1}{s_1!\,(4-2s_1)!\,s_2!\,(4-2s_2)!\,s_3!\,(4-2s_3)!} \Bigg\}$$

$$\alpha_3\,(m_4) = \frac{3}{32\,n^2} \Bigg\{ \frac{12!}{6!\,n^6} \left[\frac{1}{6!} + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{6!} \right] -$$

$$- \frac{10!}{5!\,n^5} \left[22 + 34\,(n-1) + 6\,(n-1)\,(n-2) \right] +$$

$$+ \frac{8!}{4!\,n^4} \left[990 + 762\,(n-1) + 78\,(n-1)\,(n-2) \right] -$$

$$- \frac{6!}{3!\,n^3} \left[18.480 + 7.056\,(n-1) + 432\,(n-1)\,(n-2) \right] +$$

$$+ \frac{4!}{2!\, n^2} \left[138.600 + 26.040\,(n-1) + 936\,(n-1)\,(n-2) \right] -$$

$$- \frac{2!}{n} \left[332.640 + 30.240\,(n-1) + 864\,(n-1)\,(n-2) \right] +$$

$$+ \left[110.880 + 10.080\,(n-1) + 288\,(n-1)\,(n-2) \right] \Big\}$$

$$\alpha_3\,(m_4) = \frac{27\,(n-1)}{n^6} \left[n^5 + 27\,n^4 + 226\,n^3 - 1.098\,n^2 + 1.725\,n - 945 \right]$$

2.4 — Para $r = 4$, tem-se:

$$\alpha_4\,(m_p) = \frac{4!}{2^{2p}\, n^4} \sum_{e=1}^{4} \binom{n}{e} \sum_{r_1 + \ldots + r_e = 4} \frac{(pr_1)!\, \ldots\, (pr_e)!}{r_1!\, \ldots\, r_e!} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{2p} \left(-\frac{1}{n} \right)^{2p-s} \frac{(4\,p - 2\,s)!}{(2\,p - s)!} \times$$

$$\times \sum_{s_1 + \ldots + s_e = s} \frac{1}{s_1!\,(pr_1 - 2\,s_1)!\, \ldots\, s_e!\,(pr_e - 2\,s_e)!}$$

$$\alpha_4\,(m_p) = \frac{4!}{2^{2p}\, n^3} \sum_{s=0}^{2p} \left(-\frac{1}{n} \right)^{2p-s} \frac{(4\,p - 2\,s)!}{(2\,p - s)!} \left\{ \frac{(4\,p)!}{4!} \frac{1}{s!\,(4\,p - 2\,s)!} + \right.$$

$$+ (n-1) \frac{(3\,p)!\, p!}{3!} \sum_{s_1 + s_2 = s} \frac{1}{s_1!\,(3\,p - 2\,s_1)!\, s_2!\,(p - 2\,s_2)!} +$$

$$+ \frac{n-1}{8} \left[(2\,p)! \right]^2 \sum_{s_1 + s_2 = s} \frac{1}{s_1!\,(2\,p - 2\,s_1)!\, s_2!\,(2\,p - 2\,s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)}{4} (p!)^2\,(2\,p)! \times$$

(21)

$$\times \sum_{s_1 + s_2 + s_3 = s} \frac{1}{s_1!\,(p - 2\,s_1)!\, s_2!\,(p - 2\,s_2)!\, s_3!\,(2\,p - 2\,s_3)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24} (p!)^4 \sum_{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s}$$

$$\left. \frac{1}{s_1!\,(p - 2\,s_1)!\, s_2!\,(p - 2\,s_2)!\, s_3!\,(p - 2\,s_3)!\, s_4!\,(p - 2\,s_4)!} \right\}$$

Fazendo na (21) $p = 2$, vem:

$$\alpha_4 (m_2) = \frac{3}{2 n^3} \sum_{s=0}^{4} \left(-\frac{1}{n}\right)^{4-s} \frac{(8-2s)!}{(4-s)!} \left\{ \frac{8!}{4!} \frac{1}{s!\,(8-2s)!} + \right.$$

$$+ (n-1) \frac{6!\,2!}{3!} \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(6-2s_1)!\,s_2!\,(2-2s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)}{8} (4!)^2 \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(4-2s_1)!\,s_2!\,(4-2s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{12} (2!)^2\, 4! \sum_{s_1+s_2+s_3=s}$$

$$\frac{3}{s_1!\,(2-2s_1)!\,s_2!\,(2-2s_2)!\,s_3!\,(4-2s_3)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} (2!)^4 \sum_{s_1+s_2+s_3+s_4=s}$$

$$\left. \frac{1}{s_1!\,(2-2s_1)!\,s_2!\,(2-2s_2)!\,s_3!\,(2-2s_3)!\,s_4!\,(2-2s_4)!} \right\}$$

$$\alpha_4 (m_2) = \frac{3}{2 n^3} \left\{ \frac{1.680}{n^4} \left[\frac{1}{24} + \frac{n-1}{6} + \frac{n-1}{8} + \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \right] - \frac{120}{n^3} \left[\frac{7}{3} + \frac{16(n-1)}{3} + 3(n-1) + \right.$$

$$\left. + 4(n-1)(n-2) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \right] +$$

$$+ \frac{12}{n^2} \left[35 + 40(n-1) + 21(n-1) + 16 (n-1)(n-2) + \right.$$

$$\left. + (n-1)(n-2)(n-3) \right]$$

$$- \frac{2}{n} \left[140 + 80(n-1) + 36(n-1) + 24(n-1)(n-2) + \right.$$

$$\left. + \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \right]$$

$$+ \left[70 + 40(n-1) + 18(n-1) + 12(n-1)(n-2) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \right] \right\}$$

$$\alpha_4\,(m_2) = \frac{(n-1)\,(n+1)\,(n+3)\,(n+5)}{n^4}$$

Ainda na (21) fazendo $p = 3$, vem:

$$\alpha_4\,(m_3) = \frac{4!}{2^6\,n^3} \sum_{s=0}^{6} \left(-\frac{1}{n}\right)^{6-s} \frac{(12-2\,s)!}{(6-s)!} \left\{ \frac{12!}{4!} \frac{1}{s!\,(12-2\,s)!} + \right.$$

$$+ (n-1)\,\frac{9!\,3!}{3!} \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(9-2\,s_1)!\,s_2!\,(3-2\,s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)}{8}\,(6!)^2 \sum_{s_1+s_2=s} \frac{1}{s_1!\,(6-2\,s_1)!\,s_2!\,(6-2\,s_2)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)}{4}\,(3!)^2\,6! \sum_{s_1+s_2+s_3=s} \frac{1}{s_1!\,(3-2\,s_1)!\,s_2!\,(3-2\,s_2)!\,s_3!\,(6-2\,s_3)!} +$$

$$+ \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}\,(3!)^4 \sum_{s_1+s_2+s_3+s_4=s}$$

$$\left. \frac{1}{s_1!\,(3-2\,s_1)!\,s_2!\,(3-2\,s_2)!\,s_3!\,(3-2\,s_3)!\,s_4!\,(3-2\,s_4)!} \right\}$$

$$= \frac{3}{8\,n^3} \left\{ \frac{665.280}{n^6} \left[\frac{1}{24} + \frac{n-1}{6} + \frac{n-1}{8} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{4} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24} \right] -$$

$$- \frac{30.240}{n^5} \left[\frac{11}{2} + 13\,(n-1) + \frac{15\,(n-1)}{2} + \frac{21\,(n-1)\,(n-2)}{2} + \right.$$

$$\left. + (n-1)\,(n-2)\,(n-3) \right] +$$

$$+ \frac{1.680}{n^4} \left[\frac{495}{2} + 324\,(n-1) + \frac{315\,(n-1)}{2} + 144\,(n-1)\,(n-2) + \right.$$

$$\left. + 9\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) \right] -$$

$$- \frac{120}{n^3} \left[4.620 + 3.192\,(n-1) + 1.380\,(n-1) + 840\,(n-1)\,(n-2) + \right.$$

$$\left. + 36\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) \right] +$$

$$+\frac{12}{n^2}\Big[34.650+12.600\,(n-1)+4.950\,(n-1)+1.980\,(n-1)\,(n-2)$$

$$+54\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\Big]-$$

$$-\frac{2}{n}\Big[83.160+15.120\,(n-1)+5.400\,(n-1)+1.080\,(n-1)\,(n-2)\Big]$$

$$+\Big[27.720+1.800\,(n-1)\Big]\Big]\Big\}=\frac{108\,(n-1)\,(n-2)\,(n^2+27\,n-70)}{n^6}$$

Finalmente, para $p=4$, a (21) torna-se:

$$\alpha_4\,(m_4)=\frac{4!}{2^8\,n^3}\sum_{s=0}^{8}\left(-\frac{1}{n}\right)^{8-s}\frac{(16-2\,s)!}{(8-s)!}\left\{\frac{16!}{4!}\;\frac{1}{s!\,(16-2\,s)!}+\right.$$

$$+(n-1)\,\frac{12!\,4!}{3!}\sum_{s_1+s_2=s}\frac{1}{s_1!\,(12-2\,s_1)!\,s_2!\,(4-2\,s_2)!}+$$

$$+\frac{(n-1)}{8}\,(8!)^2\sum_{s_1+s_2=s}\frac{1}{s_1!\,(8-2\,s_1)!\,s_2!\,(8-2\,s_2)!}+$$

$$+\frac{3\,(n-1)\,(n-2)}{12}\,(4!)^2\,8!\sum_{s_1+s_2+s_3=s}\frac{1}{s_1!\,(4-2\,s_2)!\,s_2!\,(4-2\,s_2)!\,s_3!\,(8-2\,s_3)!}+$$

$$+\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24}\,(4!)^4\sum_{s_1+s_2+s_3+s_4=s}$$

$$\left.\frac{1}{s_1!\,(4-2\,s_1)!\,s_2!\,(4-2\,s_2)!\,s_3!\,(4-2\,s_3)!\,s_4!\,(4-2\,s_4)!}\right\}$$

$$\alpha_4\,(m_4)=\frac{3}{32\,n^3}\left\{\frac{518.918.400}{n^8}\left[\frac{1}{768}+\frac{n-1}{192}+\frac{n-1}{256}+\frac{(n-1)\,(n-2)}{128}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{768}\right]-$$

$$-\frac{17.297.280}{n^7}\left[\frac{5}{16}+\frac{3\,(n-1)}{4}+\frac{7\,(n-1)}{16}+\frac{5\,(n-1)\,(n-2)}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{16}\right]+$$

$$+ \frac{665.280}{n^6}\left[\frac{455}{16} + \frac{157\,(n-1)}{4} + \frac{301\,(n-1)}{16} + \frac{147\,(n-1)\,(n-2)}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{19\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{16}\right] -$$

$$- \frac{30.240}{n^5}\left[\frac{5.005}{4} + 957\,(n-1) + \frac{1.575\,(n-1)}{4} + \frac{519\,(n-1)\,(n-2)}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{45\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4}\right] +$$

$$+ \frac{1.680}{n^4}\left[\frac{225.225}{8} + \frac{23.265\,(n-1)}{2} + \frac{33.915\,(n-1)}{8} + \right.$$

$$\left. + \frac{7.491\,(n-1)\,(n-2)}{4} + \frac{441\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{8}\right] -$$

$$- \frac{120}{n^3}\left[315.315 + 69.300\,(n-1) + 22.785\,(n-1) + \right.$$

$$\left. + 6.678\,(n-1)\,(n-2) + 135\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\right] +$$

$$+ \frac{12}{n^2}\left[1.576.575 + 180.180\,(n-1) + 55.125\,(n-1) + \right.$$

$$\left. + 10.710\,(n-1)\,(n-2) + 171\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\right] -$$

$$- \frac{2}{n}\left[2.702.700 + 166.320\,(n-1) + 44.100\,(n-1) + \right.$$

$$\left. + 7.560\,(n-1)\,(n-2) + 108\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\right] +$$

$$+ \left[675.675 + 41.580\,(n-1) + 11.025\,(n-1) + \right.$$

$$\left. + 1.890\,(n-1)\,(n-2) + 27\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\right]\Big\}$$

$$= \frac{27\,(n-1)}{n^8}\left[3\,n^7 + 171\,n^6 + 4.111\,n^5 + 42.871\,n^4 - 308.727\,n^3 + \right.$$

$$\left. + 776.385\,n^2 - 897.435\,n + 405.405\right]$$

2.5 — Os resultados que acabam de ser obtidos estão reunidos no quadro seguinte:

QAUDRO I

Momentos sob a hipótese N (0,1)

	m_2	m_3	m_4
α_1	$\frac{n-1}{n}$	0	$\frac{3(n-1)^2}{n^2}$
α_2	$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$	$\frac{6(n-1)(n-2)}{n^3}$	$\frac{3(n-1)(3n^3+23n^2-63n+45)}{n^4}$
α_3	$\frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{n^3}$	0	$\frac{27(n-1)(n^5+27n^4+226n^3-1.098n^2+1.725n-945)}{n^6}$
α_4	$\frac{(n-1)(n+1)(n+3)(n+5)}{n^4}$	$\frac{108(n-1)(n-2)(n^2+27n-70)}{n^6}$	$\frac{27(n-1)(3n^7+171n^6+4.111n^5+42871n^4-308.727n^3+776.385n^2-897.435n+405.405)}{n^8}$

§ 3 —

3.0 — Determinamos, aqui, os valores dos momentos centrados.

3.1 — Para a variância, tem-se:

$$\mu_2(m_2) = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{2(n-1)}{n^2}$$

$$\mu_2(m_3) = \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3}$$

$$\mu_2(m_4) = \frac{3(n-1)(3n^3+23n^2-63n+45)}{n^4} - \frac{9(n-1)^4}{n^4}$$

$$= \frac{24(n-1)(4n^2-9n+6)}{n^4}$$

3.2 — Para os momentos de terceira ordem, vem:

$$\mu_3(m_2) = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{n^3} - \frac{3(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n} +$$

$$+ \frac{2(n-1)^3}{n^3} = \frac{8(n-1)}{n^3}$$

$$\mu_3(m_3) = 0$$

$$\mu_3(m_4) = \frac{27(n-1)(n^5+27n^4+226n^3-1.098n^2+1.725n-945)}{n^6} -$$

$$- \frac{9(n-1)(3n^3+23n^2-63n+45)}{n^4} \times \frac{3(n-1)^2}{n^2} +$$

$$+ \frac{54(n-1)^6}{n^6} = \frac{864(n-1)(11n^3-41n^2+59n-31)}{n^6}$$

3.3 — No que concerne aos momentos de quarta ordem, obtêm-se:

$$\mu_4(m_2) = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)(n+5)}{n^4} - \frac{4(n-1)(n+1)(n+3)}{n^3} \times \frac{n-1}{n} +$$

$$+ \frac{6(n-1)(n+1)}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} - \frac{3(n-1)^4}{n^4} = \frac{12(n-1)(n+3)}{n^4}$$

$$\mu_4(m_3) = \frac{108(n-1)(n-2)(n^2+27n-70)}{n^6}$$

$$\mu_4(m_4) = \frac{27(n-1)}{n^8}(3n^7 + 171n^6 + 4.111n^5 + 42.871n^4 - 308.727n^3 +$$

$$+ 776.385n^2 - 897.435n + 405.405) - \frac{108(n-1)}{n^6}(n^5 + 27n^4 +$$

$$+ 226n^3 - 1.098n^2 + 1.725n - 945)\frac{3(n-1)^2}{n^2} + \frac{18(n-1)}{n^4}$$

$$(3n^3 + 2n^2 - 63n + 45)\frac{9(n-1)^4}{n^4} - \frac{243(n-1)^8}{n^8} =$$

$$= \frac{1.728(n-1)(16n^5 + 1.000n^4 - 5.667n^3 + 13.215n^2 - 14.724n + 6.516)}{n^8}$$

3.4 — Dos resultados constantes desta epígrafe, segue imediatamente para valores das características $\gamma_1^2(m_p)$ e $\gamma_2^2(m_p)$ definidas por:

$$\gamma_1^2(m_p) = \frac{\mu_3^2(m_p)}{\mu_2^3(m_p)}$$

$$\gamma_2(m_p) = \frac{\mu_4(m_p)}{\mu_2^2(m_p)} - 3.$$

$$\gamma_1^2(m_2) = \frac{8}{n-1}$$

$$\gamma_1^2(m_3) = O$$

$$\gamma_1^2(m_4) = \frac{54(11n^3 - 41n^2 + 59n - 31)^2}{(n-1)(4n^2 - 9n + 6)^3}$$

$$\gamma_2(m_2) = \frac{12}{n-1}$$

$$\gamma_2(m_3) = \frac{18(5n-12)}{(n-1)(n-2)}$$

$$\gamma_2(m_4) = \frac{12(272n^4 - 1.467n^3 + 3.363n^2 - 3.717n + 1.638)}{(n-1)(4n^2 - 9n + 6)^2}$$

§ 4 —

A fórmula (16) permite, como vimos, determinar os momentos da variável m_p para $p > 1$. Apresenta, entretanto, grande interêsse o conhecimento dos quatro primeiros momentos da variável $\bar{x}$. Pode-se, todavia, conseguir uma expressão geral para os mesmos, válida, aliás, independentemente de qualquer hipótese acêrca da natureza da população.

Para tanto, notemos, em primeiro lugar, que:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} E \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = m$$

em que n é a média populacional.

Seguindo o mesmo raciocínio empregado para a obtenção da (4), podemos escrever:

$$\mu_r(\bar{x}) = E[\bar{x} - m]^r = \frac{1}{n^r} E\left[\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - m)\right]^r =$$

$$= \frac{1}{n^r} E \sum_{r_1+\dots+r_n=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_n!} (x_1 - m)^{r_1} (x_2 - m)^{r_2} \dots (x_n - m)^{r_n}$$

$$= \frac{1}{n^r} E \sum_{e=1}^{r} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_e!} \sum_{\nu_e > \dots > \nu_1 = 1} (x_{\nu_1} - m)^{r_1} \dots (x_{\nu_e} - m)^{r_e}$$

$$(22) \qquad = \frac{1}{n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} \frac{r!}{r_1!\dots r_e!} \mu_{r_1} \dots \mu_{r_e}$$

em que a segunda somatória é estendida a tôdas as *e* partições próprias de r que não contenham a unidade, esta úitma restrição sendo devida ao fato evidente de $\mu_1 = o$.

Fazendo na (22) $r = 2, 3, 4$, vem:

$$\mu_2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left[\binom{n}{1}\frac{2!}{2!}\mu_2\right] = \frac{\mu_2}{n}$$

$$\mu_3(\bar{x}) = \frac{1}{n^3}\left[\binom{n}{1}\frac{3!}{3!}\mu_3\right] = \frac{\mu_3}{n^2}$$

$$\mu_4(\bar{x}) = \frac{1}{n^4}\left[\binom{n}{1}\mu_4 + \binom{n}{2}\frac{4!}{2!\,2!}\mu_2^2\right] = \frac{\mu_4}{n^3} + \frac{3(n-1)\mu_2^2}{n^3}$$

Em particular, para o caso normal $N(m, \sigma)$, obtêm-se:

$$\mu_2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mu_3(\bar{x}) = O$$

$$\mu_4(\bar{x}) = \frac{3\sigma^4}{n^2}$$

e, portanto:

$$\gamma_1 = O, \qquad \gamma_2 = O$$

§ 5 —

Tôdas as fórmulas obtidas no parágrafo 3 o foram sob a hipótese de que a população era N(0,1). Notando que se x fôr $N(m, \sigma)$ e y N(0,1), subsiste:

$$\mu_r[m_p(x)] = \sigma^{pr} \quad \mu_r[m_p(y)]$$

então, os resultados das epígrafes 3 e 4 permitem estabelecer o seguinte quadro:

QUADRO II

Momentos sob a hipótese $N(m, \sigma)$

	$\bar{x}$	m_2	m_3	m_4
α_1	m	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	O	$\frac{3(n-1)^2}{n^2}\sigma^4$
μ_2	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$	$\frac{6(n-1)(n-2)}{n^3}\sigma^6$	$\frac{24(n-1)(4n^2-9n+6)}{n^4}\sigma^8$
μ_3	O	$\frac{8(n-1)}{n^3}\sigma^6$	O	$\frac{864(n-1)(11n^3-41n^2+59n-31)}{n^6}\sigma^{12}$
μ_4	$\frac{3\sigma^4}{n^2}$	$\frac{12(n-1)(n+3)}{n^4}\sigma^8$	$\frac{108(n-1)(n-2)(n^2+27n-70)}{n^6}\sigma^{12}$	$\frac{1.728(n-1)(16n^5+1.000n^4-5.667n^3+13.215n^2-14.724n+6516)}{n^8}\sigma^{16}$
γ_1^2	O	$\frac{8}{n-1}$	O	$\frac{54(11n^3-41n^2+59n-31)^2}{(n-1)(4n^2-9n+6)^3}$
γ_2	O	$\frac{12}{n-1}$	$\frac{18(5n-12)}{(n-1)(n-2)}$	$\frac{12(272n^4-1.467n^3+3.363n^2-3.717n+1.638)}{(n-1)(4n^2-9n+6)^2}$

§ 6 —

6.0 — Pretendemos, neste tópico, tecer algumas considerações acêrca dos resultados obtidos neste longo trabalho de cálculo, dos quais, os mais importantes figuram no quadro II.

6.1 — A exatidão dos valores encontrados para as características da variável aleatória $\bar{x}$ não pode sofrer qualquer contestação, bastando notar que dêles segue diretamente que:

$$E(\sqrt{n}\,\bar{x}) = \sqrt{n}\,.\,m$$

$$\mu_2(\sqrt{n}\,\bar{x}) = \sigma^2$$

$$\mu_3(\sqrt{n}\,\bar{x}) = 0$$

$$\mu_4(\sqrt{n}\,\bar{x}) = 3\,\sigma^4$$

o que concorda com o fato bem conhecido de que a distribuição de $\sqrt{n}\,\bar{x}$ é $N(\sqrt{n}\,m, \sigma)$.

6.2 — No que diz respeito às características da variância amostral, é fácil pôr em prova a veracidade das expressões para elas aqui consignadas.

De fato, elas resultam de transformações elementares operadas sôbre os momentos não centrados de m_2 e os valores dêstes, constantes do quadro I coincidem com os dados pela fórmula:

$$\alpha_\nu(m_2) = \frac{(n-1)(n+1)(n+3)\dots(n+2\nu-3)}{n^\nu}\,\sigma^{2\nu}$$

obtida por via da distribuição exata de m_2 em amostras supostas provenientes de uma população com distribuição normal.

6.3 — A nulidade de $\alpha_1(m_3)$ e de $\mu_3(m_3)$ é evidente. Para julgar da exatidão do valor de $\mu_2(m_3)$ dispomos do seguinte indício.

É sabido que $(\sqrt{n}\,m_\nu)$ é assintòticamente normal com variância:

(23) $$\mu_{2\nu} - 2\,\nu\,\mu_{\nu-1}\,\mu_{\nu+1}\,\mu_\nu^2 + \nu^2\,\mu_2\,\mu_{\nu-1}^2$$

Pois bem, esta expressão para $\nu = 3$, torna-se:

$$\mu_6 - 6\,\mu_2\,\mu_4 - \mu + 9\,\mu_2^3$$

e vale, portanto, no caso normal:

$$15\,\sigma^6 - 18\,\sigma^6 + 9\,\sigma^6 = 6\,\sigma^6$$

Mas, do valor de $\mu_2(m_2)$ constante do quadro II segue:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_2 (\sqrt{n}\ m) = \lim_{n\to\infty} n . \frac{6\ (n-1)\ (n-3)}{n^3}\ \sigma^6 = 6\ \sigma^6$$

Para ultimar a parte referente a m_3, devemos ainda notar que, sendo assintòticamente normal a distribuição de $\sqrt{n}\, m_3$, deverá subsistir, no limite:

$$\mu_4 (\sqrt{n}\ m_3) = 3\ \mu_2^3\ (\sqrt{n}\ m_3)$$

Mas, dos resultados obtidos, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_4 (\sqrt{n}\ m_3) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 . 108\ (n-1)\ (n-2)\ (n^2+27\,n-70)}{n^6}\ \sigma^{12}$$

$$= 108\ \sigma^{12}$$

que é precisamente o valor de $3\ (6\,\sigma^6)^2$.

6.4 — A esperança de m_4 é por demais conhecida para que sôbre ela paire qualquer dúvida. A variância da distribuição limitante de $(\sqrt{n}\, m_4)$ vale, pela (23):

$$\mu_8 - 8\ \mu_3\ \mu_5 - \mu_4^2 + 16\ \mu_2\ \mu_3^2$$

ou seja, no caso normal:

$$105\ \sigma^8 - 9\ \sigma^8 = 96\ \sigma^8$$

Ora, do valor achado para $\mu_2(m_4)$ segue:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_2 (\sqrt{n}\ m_4) = \lim_{n\to\infty} n . \frac{24\ (n-1)\ (4\,n^2-9\,n+6)}{n^4}\ \sigma^8 = 96\ \sigma^8$$

Finalmente, a normalidade da distribuição limitante de $(\sqrt{n}\, m_4)$ dá:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_3 (\sqrt{n}\ m_4) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_4 (\sqrt{n}\ m_4) = 3 \left[\lim_{n\to\infty} \mu_2 (\sqrt{n}\ m_4) \right] = 27.648\ \sigma^{16}$$

o que coincide precisamente com o que obtivemos, visto como:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_3 (\sqrt{n}\ m_4) = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{3}}\ \frac{864\ (n-1)\ (11\,n^3-41\,n^2+59\,n-31)}{n^6}\ \sigma^{12} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \mu_4 (\sqrt{n}\ m_4) = \lim_{n\to\infty} \left[n^2 \frac{1.728 (n-1) (16 n^5 + 1.000 n^4 -}{n^8} \right.$$

$$\left. \frac{-5.667 n^3 + 13.215 n^2 - 14.724 n + 6.516) \sigma^{16}}{n^8} \right]$$

$$= 27.648\ \sigma^{16}$$

6.5 — Como importantes aplicações dos resultados obtidos, vamos, agora, determinar a esperança e a variância das duas variáveis aleatórias:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \qquad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

Utilizando do teorema de Geary, segundo o qual: $m_2^{1/2}$ e $m_\nu\ m_2^{-\nu}$ são independentes, podemos escrever:

$$(24) \qquad E(m_\nu^p) \equiv E\left[(m_\nu^p\ m_2^{-\frac{\nu p}{2}})\ m_2^{\frac{\nu p}{2}} \right] = E(m_\nu^p\ m_2^{-\frac{\nu p}{2}})\ E(m_2^{\frac{\nu p}{2}})$$

Supondo na (24) $\nu = 3$ e $p = 1$, vem:

$$E(g_1) = \frac{E(m_3)}{E(m_2^{3/2})}$$

Mas $\alpha_1 (m_3) = 0$ e, portanto:

$$E(g_1) = 0$$

Para $\nu = 3$ e $p = 2$, a (24) dá:

$$E(g_1^2) = \frac{E(m_3^2)}{E(m_2^3)}$$

ou, por substituição dos dados do quadro I:

$$E(g_1^2) = \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3} \times \frac{n^3}{(n-1)(n+1)(n+3)} = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

do que segue:

$$D^2(g_1) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

Ainda na (24), fazendo $\nu = 4$ e $p = 1$, vem:

$$E\left(\frac{m_4^2}{m_2^4}\right) = \frac{E(m_4^2)}{E(m_2^4)}$$

ou seja:

$$E\,(g_2+3)^2 = \frac{E\,(m_4^2)}{E\,(m_2^4)}$$

donde:

$$E\,(g_2^2) = \frac{3\,(n-1)\,(3n^3+23\,n^2-63\,n+45)}{n^4} \times \frac{n^4}{(n-1)\,(n+1)\,(n+3)\,(n+5)} +$$

$$+ \frac{36}{n+1} - 9 = \frac{12\,(2\,n^2-9\,n+45)}{(n+1)\,(n+3)\,(n+5)}$$

Dêstes resultados segue:

$$D^2\,(g_2) = \frac{12\,(2\,n^2-9\,n+45)}{(n+1)\,(n+3)\,(n+5)} - \frac{36}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{24\,n\,(n-2)\,(n-3)}{(n+1)^2\,(n+3)\,(n+5)}$$

§ 7 —

7.0 — Como aplicação dos nossos resultados no caso bidimensional, vamos determinar os momentos da variável m_{11}. Fazendo na (17) $p_1 = p_2 = 1$, tem-se:

$$\alpha_r\,(m_{11}) = \frac{r!}{2^q\,n^r} \sum_{e=1}^{r} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\dots+r_e=r} r_1!\,\dots\,r_e! \sum_{s=0}^{q} \left(-\frac{1}{n}\right)^{q-s}$$

(25)

$$\sum_{\sum_{h=1}^{e}(s_{1h}+s_{2h})=s} \frac{\left(r-2\sum_{h=1}^{e} s_{1h}\right)!\,\left(r-2\sum_{h=1}^{e} s_{2h}\right)!}{\left(\frac{r}{2}-\sum_{h=1}^{e} s_{1h}\right)!\,\left(\frac{r}{2}-\sum_{h=1}^{e} s_{2h}\right)!\,\prod_{h=1}^{e} s_{1h}!\,s_{2h}!\,(r_h-2\,s_{1h})! \times (r_h-2\,s_{2h})!}$$

7.1 — A (25) mostra, imediatamente, que sob a condição $r =$ número ímpar,

$$\alpha_r\,(m_{11}) = 0$$

De fato, em tal caso:

$$\left(\frac{r}{2} - \sum_{h=1}^{e} s_{jh}\right) \qquad (j = 1, 2)$$

é não inteiro.

Desta conclusão segue, imediatamente que, em particular, pode-se escrever:

$$\alpha_1 (m_{11}) = \alpha_3 (m_{11}) = 0$$

7.2 — Para $r = 2$, tem-se:

$$\alpha_2 (m_{11}) = \frac{1}{n} \sum_{s=o}^{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^{2-s} \sum_{s_{11}+s_{21}=s} \frac{1}{(1-s_{11})!\,(1-s_{21})!\,s_{11}!\,s_{21}!} +$$

$$+ \frac{n-1}{4n} \sum_{s=o}^{2} \left(-\frac{1}{n}\right)^{2-s} \times \sum_{s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}=s}$$

$$\frac{[2-2(s_{11}+s_{12})]!\,[2-2(s_{21}+s_{22})]!}{[1-(s_{11}+s_{12})]!\,[1-(s_{21}+s_{22}]!\,s_{11}!\,s_{12}!\,s_{21}!\,s_{22}!\,(1-2s_{11})!\,(1-2s_{12})!\,(1-2s_{21}!)\,(1-22s_{22})!}$$

$$= \left[\frac{1}{n^3} + \frac{n-1}{n^3}\right] + \left[-\frac{2}{n^2}\right] + \left[\frac{1}{n}\right] = \frac{n-1}{n^2}$$

7.3 — Para $r = 4$, tem-se, pela (25):

$$\alpha_4 (m_{11}) = \frac{3}{2n^4} \sum_{e=1}^{4} \binom{n}{e} \sum_{r_1+\ldots+r_e=4} r_1!\ldots r_e! \sum_{s=o}^{4} \left(-\frac{1}{n}\right)^{4-s} \times$$

$$\times \sum_{\sum_{h=1}^{e}(s_{1h}+s_{2h})=s} \frac{(4-2\sum_{h=1}^{e} s_{1h})!\,(4-2\sum_{h-1}^{e} s_{2h})!}{(2-\sum_{h=1}^{e} s_{1h})!\,(2-\sum_{h=1}^{e} s_{2h})!\,\pi_{h=1}^{e}\, s_{1h}!\,s_{2h}!\,(r_h-2s_{1h})!\,(r_h-2s_{2h})!}$$

ou seja:

$$\alpha_4 (m_{11}) = \frac{3}{2n^3} \sum_{s=o}^{4} \left(-\frac{1}{n}\right)^{4-s} \left\{ 24 \sum_{s_{11}+s_{21}=s} \frac{1}{(2-s_{11})!\,(2-s_{21})!\,s_{11}!\,s_{21}!} + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)}{2} \sum_{s_{11}+s_{12}+s_{21}+s_{22}=s} \frac{[4-2(s_{11}+s_{12})]!\,[4-2(s_{21}+s_{22})]!}{[2-(s_{11}+s_{12})]!\,[2-(s_{21}+s_{22})]!\,s_{11}!\,s_{12}!\,s_{21}!\,s_{22}!} \times$$

$$\times \left[\frac{2.3!}{(3-2s_{11})!\,(3-2s_{21})!\,(1-2s_{12})!\,(1-2s_{22})!} + \right.$$

$$\left. + \frac{2!\,2!}{(2-2s_{11})!\,(2-2s_{12})!\,(2-2s_{21})!\,(2-2s_{22})!} \right] +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \sum_{\sum_{h=1}^{3}(s_{1h}+s_{2h})=s} \frac{[4-2\sum_{h=1}^{3} s_{1h}]!\,[4-2\sum_{h=1}^{3} s_{2h}]!}{[2-\sum_{h=1}^{3} s_{1h}]!\,[2-\sum_{h=1}^{3} s_{2h}]!\,\pi_{h=1}^{3}\, s_{1h}!\,s_{2h}!} \times$$

$$\times \left[\frac{3.\ 2!}{(1-2s_{22})!(2-2s_{13})!(2-2s_{23})!\ (1-2s_{11})!(1-2s_{21})!(1-2s_{12})!} \right] +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \sum_{\sum\limits_{h=1}^{4} (s_{1h}+s_{2h})=8} \frac{[4-2\sum\limits_{h=1}^{4} s_{1h}]!\ [4-2\sum\limits_{h=1}^{4} s_{2h}]!}{[2-\sum\limits_{h=1}^{4} s_{1h}]!\ [2-\sum\limits_{h=1}^{4} s_{2h}]!\ \prod\limits_{h=1}^{4} s_{1h}!\, s_{2h}!} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(1-2s_{11})!(1-2s_{12})!(1-2s_{13})!(1-2s_{14})!\ (1-2s_{21})!(1-2s_{22})!(1-2s_{23})!(1-2s_{24})!} \right] \Bigg\}$$

ou, ainda:

$$\alpha_4 (m_{11}) = \frac{3}{2\,n^3} \left\{ \frac{1}{n^4} \left[6+(n-1)(24+18)+36(n-1)(n-2)+ \right.\right.$$

$$\left. +6(n-1)(n-2)(n-3) \right] -$$

$$- \frac{1}{n^3} \left[24+(n-1)(48+24)+24(n-1)(n-2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{n^2} \left[36+(n-1)(24+6+18)+4(n-1)(n-2) \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{n} \left[24+8(n-1) \right] + \left[6+2(n-1) \right] \right\}$$

$$= \frac{3(n-1)(n^2+n+2)}{n^5}$$

Dêstes resultados, segue imediatamente que os μ coincidem com os α e tem-se:

$$\gamma_1 (m_{11}) = 0$$

$$\gamma_2 (m_{11}) = \frac{6\,(n+1)}{n\,(n-1)}$$

7.4 — O valor obtido para a variância de m_{11} permite escrever:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_2 (\sqrt{n}\ m_{11}) = \lim_{n\to\infty} n.\frac{n-1}{n^2} = 1$$

resultado êste que concorda com a variância da distribuição limitante de $(\sqrt{n}\, m_{11})$. De fato é sabido que $\mu_2(\sqrt{n}\, m_{p_1 \ldots p_k})$ no limite, vale:

$$\mu_{2p_1 \ldots 2p_k} - \mu^2_{p_1 \ldots p_k} -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{k} p_i \, \mu_{p_1 \ldots p_{i-1} (p_i - 1) p_{i+1} \ldots p_k} \mu_{p_1 \ldots p_{i-1} (p_i + 1) p_{i+1} \ldots p_k} +$$

(26)

$$+ \sum_{i,j} p_i \, p_j \, \mu_{p_1 \ldots p_{i+1} (p_i - 1) p_{i+1} \ldots p_k} \cdot \mu_{p_1 \ldots p_j (p_j - 1) p_{j+1} \ldots p_k} \mu_{11} (x_i \, x_j)$$

Para $k = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, a (26) dá:

$$\mu_{22} - \mu^2_{11} - 2 \mu_{01} \mu_{21} - 2 \mu_{10} \mu_{12} + \mu^2_{01} \mu_{11} (x_1 \, x_1) + \mu^2_{10} \mu_{11} (x_2 \, x_2)$$

que, sob as condições da nossa hipótese, torna-se:

$$\mu_{22} = (1 + 2 \rho^2) \sigma^2_1 \sigma^2_2 = 1$$

Finalmente, a normalidade da distribuição limitante de $(\sqrt{n} . m_{11})$ dá:

$$\lim_{n \to \infty} \mu_4 (\sqrt{n} \; m_{11}) = 3 \left[\lim_{n \to \infty} \mu_2 (\sqrt{n} \; m_{11}) \right] = 3$$

e que coincide precisamente com o que obtivemos, visto como:

$$\lim_{n \to \infty} \mu_4 (\sqrt{n} \; m_{11}) = \lim_{n \to \infty} . \; n_2 \; \frac{3 n - 1)}{n^5} (n^2 + n + 2) = 3$$

7.5 — Os momentos de m_{11} deduzidos neste parágrafo o foram sob a hipótese de que os parâmetros de cada componente da população eram 0 e 1.

Notando que se x_1 e x_2 foram respectivamente $N(m_1, \sigma_1)$ e $N(m_2, \sigma_2)$ e y_1 e y_2 forem ambos $N(0,1)$, subsiste:

$$\mu_r \left[m_{p_1 \, p_2} (x_1, x_2) \right] = \sigma_1^{p_1 r} \sigma_2^{p_2 r} \; \mu_r \left[m_{p_1 \, p_2} (y_1 \, y_2) \right]$$

podemos, então, construir o quadro abaixo:

QUADRO III

Momentos de m_{11} sob a hipótes N $(m_1, m_2, \sigma_1, O, \sigma_2)$

Momentos de m_{11}	Valor
α_1	O
μ_2	$\frac{n-1}{n^2} \sigma_1^2 \sigma_2^2$
μ_3	O
μ_4	$\frac{3(n-1)(n^2+n+2)}{n^5} \sigma_1^4 \sigma_2^4$
γ_1	O
γ_2	$\frac{6(n+1)}{n(n-1)}$

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Carvalho, P. E.: Apontamentos de aula do Curso de Estatística Motemática.

Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics. 1946. Princeton. Princeton Uniser-sity Press.

Craig, C. C.: An application of Thiele's semi-invariants to the sampling problems. Metron, 7:(N. 4). 3-74, 1928.

Geary, R. C.: A general expression for the moments of certain symmetrical functions of normal samples. Biometrika, 25:184-186, 1933.

Kendall, M. G.: The Advanced Theory of Statistics. 1943. London. J. B. Lippincott Company, vol. I.

ARQUIVOS DA FACULDADE DE HIGIENE E SAÚDE PÚBLICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ÍNDICE DO VOL. 4 — 1950